CURSO 1
CUATRIMESTRE 1 -2021

Autovalores y Autovectores. Segunda Reunión

Comentarios sobre matrices no diagonalizables en $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Empecemos por recordar la definición de semejanza que dimos en la reunión anterior:

Definición: Si A y $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se dice que B es **semejante** a A si existe $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible, tal que $B = Q\,A\,Q^{-1}$.
Se nota: $B \sim A$.

Vimos un resultado muy importante que nos permite saber cuando dos matrices son semejantes sin tener que calcular la matriz Q de la definición:

$B \sim A \Leftrightarrow A$ y B tienen los mismos autovalores con la misma multiplicidad algebraica y geométrica.

Si una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ no es diagonalizable es porque existe algún autovalor cuya multiplicidad algebraica no coincide con la multiplicidad geométrica. En ese caso, no podemos encontrar una matriz diagonal D semejante a A. Pero se prueba que sí podemos encontrar una matriz *más sencilla*, diagonal por bloques, semejante a esa matriz A.
Son las llamadas matrices de Jordan que vamos a aprender a construir sólo en el caso de matrices de 2×2 y 3×3 .
Vamos a ver concretamente el caso en $\mathbb{C}^{3\times 3}$.
Si A es una matriz de $\mathbb{C}^{3\times 3}$ no diagonalizable, se cumple alguno de los siguientes casos:
$\boxed{\text{Caso 1:}}$
A tiene un autovalor de multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1.
Llamemos λ_1 al autovalor de multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1 y λ_2 al otro autovalor de A de multiplicidad algebraica y geométrica 1.

En este caso, podemos probar que $A \sim J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

Es fácil ver que la matriz J_1 tiene como autovalores a λ_1 y λ_2 y que λ_1 es un autovalor de multiplicidad algebraica 2 con $\dim(S_{\lambda_1}) = 1$ y λ_2 es un autovalor simple de J_1.
Entonces, se prueba que existe Q, tal que $A = Q\,J_1\,Q^{-1}$

Buscamos Q tal como la buscamos en el caso en el que A es diagonalizable:
$A = Q\ J_1\ Q^{-1} \Longleftrightarrow A\ Q = Q\ J_1$
Si explicitamos las columnas de $Q = [V_1|V_2|V_3]$:

$$A\ [V_1|V_2|V_3] = [V_1|V_2|V_3] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Entonces, igualando columna a columna:
$AV_1 = \lambda_1 V_1 \Rightarrow V_1$ es autovector de A asociado a λ_1.
$AV_2 = [V_1|V_2|V_3] \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} = V_1 + \lambda_1 V_2 \Rightarrow (A - \lambda_1 \mathbb{I})V_2 = V_1$
$AV_3 = \lambda_2 V_3 \Rightarrow V_3$ es autovector de A asociado a λ_2.
Entonces, construimos la matriz $Q = [V_1|V_2|V_3]$, de la siguiente forma:
Buscamos un generador de S_{λ_1}, V_1, y luego buscamos V_2, resolviendo el sistema no homogéneo $(A - \lambda_1 \mathbb{I})V_2 = V_1$.
También podemos, multiplicar la igualdad anterior m. a m. por $(A - \lambda_1 \mathbb{I})$ y obtenemos la igualdad:
$(A - \lambda_1 \mathbb{I})^2 V_2 = (A - \lambda_1 \mathbb{I})V_1 = 0_{\mathbb{C}^3}$, porque V_1 es autovector de A asociado a λ_1.
Entonces V_2 es un elemento de Nul$(A - \lambda_1 \mathbb{I})^2$ l.i. con V_1.
Asociado al autovalor simple λ_2 buscaremos su correspondiente autoespacio S_{λ_2} y obtendremos un generador,V_3.

Caso 2:

A tiene un autovalor, λ, de multiplicidad algebraica 3 y multiplicidad geométrica 1.
En este caso, podemos probar que $A \sim J_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Otra vez buscamos Q tal que $A\ Q = Q\ J_2$.
Si $Q = [V_1|V_2|V_3]$:

$$A[V_1|V_2|V_3] = [V_1|V_2|V_3] \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Igualando columna a columna como antes:

$AV_1 = \lambda V_1 \Leftrightarrow V_1$ es autovector de A asociado a λ, o sea $V_1 \in$ Nul$(A - \lambda \mathbb{I})$.

$AV_2 = V_1 + \lambda V_2 \Leftrightarrow (A - \lambda \mathbb{I})V_2 = V_1 \Rightarrow (A - \lambda \mathbb{I})^2 V_2 = 0_{\mathbb{C}^3}$, entonces necesito encontrar $V_2 \in$ Nul$(A - \lambda \mathbb{I})^2 / V_2 \notin$ Nul$(A - \lambda \mathbb{I})$ (*Así nos aseguramos de obtener un vector li con* V_1).

Finalmente, de la tercera columna obtenemos la igualdad:

$AV_3 = V_2 + \lambda V_3 \Leftrightarrow (A - \lambda\mathbb{I})V_3 = V_2$, si multiplicamos m. a m. por $(A - \lambda I)^2$ esta última igualdad obtenemos:

$(A - \lambda\mathbb{I})^3 V_3 = (A - \lambda I)^2 V_2 = 0_{\mathbb{C}^3}$.

Entonces, buscamos V_3 tal que $V_3 \in$ Nul$(A - \lambda\mathbb{I})^3$ y $V_3 \notin$ Nul$(A - \lambda\mathbb{I})^2$ (*Así nos aseguramos de obtener un vector V_3, tal que* $\{V_1,\ V_2,\ V_3\}$ l.i.)

Entonces, en este caso también obtuvimos un algoritmo para construir la matriz Q:

Si calculamos primero V_3, podemos encontrar V_2 y V_1 a través de la relación:

$(A - \lambda\mathbb{I})V_3 = V_2$, $(A - \lambda\mathbb{I})V_2 = (A - \lambda\mathbb{I})^2 V_2 = V_1$.

A V_3 se lo denomina **vector propio generalizado**.

Caso 3:

A tiene un autovalor, λ, de multiplicidad algebraica 3 y multiplicidad geométrica 2.

En este caso, podemos probar que $A \sim J_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Otra vez necesitamos encontrar $Q = [V_1|V_2|V_3]$ tal que :

$$A[V_1|V_2|V_3] = [V_1|V_2|V_3] \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Tarea para el hogar

Ejemplos

Supongamos que nos piden encontrar la descomposición de Jordan de la matriz:

$A = \begin{bmatrix} 14 & 5 & 3 \\ -2 & 11 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{bmatrix}.$

Empezamos por calcular sus autovalores. Planteamos entonces el polinomio característico:

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} (\lambda-14) & -5 & -3 \\ 2 & (\lambda-11) & -1 \\ -2 & -1 & (\lambda-11) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\lambda-14) & -5 & -3 \\ 2 & (\lambda-11) & -1 \\ 0 & (\lambda-12) & (\lambda-12) \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante por la tercera fila obtenemos:

$$p_A(\lambda) = (-1)(\lambda-12)\begin{vmatrix} (\lambda-14) & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (\lambda-12)\begin{vmatrix} (\lambda-14) & -5 \\ 2 & (\lambda-11) \end{vmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (-1)(\lambda-12)[-\lambda+20] + (\lambda-12)[\lambda^2 - 25\lambda + 154 + 10]$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda-12)\{\lambda - 20 + \lambda^2 - 25\lambda + 164\} = (\lambda-12)\{\lambda^2 - 24\lambda + 144\} = (\lambda-12)^3$$

Luego $\lambda = 12$ es autovalor de A con multiplicidad algebraica 3.
Veamos entonces la dimensión del subespacio asociado $S_{\lambda=3}$.
Buscamos entonces Nul$(12I - A)$, que queda definido por la matriz del sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} -2 & -5 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3+F-2]{F_2+F_1} \begin{bmatrix} -2 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = -x_3 \text{ y } -2x_1 + 5x_3 - 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3.$$

$S_{\lambda=12} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Averiguamos entonces que dim$(S_{\lambda=12}) = 1 \neq 3 =$multip. algebraica. Por lo tanto A no es diagonalizable y es semejante a la matriz de Jordan:

$J = \begin{bmatrix} 12 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

Para buscar la matriz de semejanza, vamos a empezar por buscar V_3. Por lo que vimos en el Caso 2, debe cumplir $V_3 \in$ Nul$(A - 12I)^3$.

$$A-12I=\begin{bmatrix}2&5&3\\-2&-1&1\\2&1&-1\end{bmatrix},(A-12I)^2=\begin{bmatrix}0&8&8\\0&-8&-8\\0&8&8\end{bmatrix},\ (A-12I)^3=0_{\mathbb{R}^{3\times 3}}.$$

Como Nul$(A-12I)^3=\mathbb{R}^3$, en principio tengo como candidatos para V_3 cualquier vector de $\mathbb{R}^3$. Si tomamos la base canónica, $E=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, tenemos tres candidatos para V_3.

Probemos con $v=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$:

Si queremos aplicar el algoritmo visto, tendremos $V_2=(A-12I)v=\begin{bmatrix}2&5&3\\-2&-1&1\\2&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-2\\2\end{bmatrix}$

Si seguimos y calculamos $(A-12I)V_2=\begin{bmatrix}2&5&3\\-2&-1&1\\2&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

Entonces el vector $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ no es un vector propio generalizado. *(No sirve como V_3)*

Probemos con $v=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\in$ Nul$(A-\lambda I)^3$.

Calculemos primero : $V_2=(A-12I)v=\begin{bmatrix}2&5&3\\-2&-1&1\\2&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-1\\1\end{bmatrix}$.

Ahora calculamos:

$V_1=(A-12I)^2V_3=(A-12I)V_2=\begin{bmatrix}2&5&3\\-2&-1&1\\2&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\-8\\8\end{bmatrix}$ (VICTORIA!!!)

Entonces el vector $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ es un vector propio y con él puedo construir la matriz Q.

Tomando: $V_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ V_2=\begin{bmatrix}5\\-1\\1\end{bmatrix},\ V_1=\begin{bmatrix}8\\-8\\8\end{bmatrix}$

$$Q = [V_1|V_2|V_3] = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 0 \\ -8 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = Q\,J\,Q^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 0 \\ -8 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 8 & 5 & 0 \\ -8 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

Definición: Dados $\mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vectorial y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, un **autovalor** de T es un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe $v \in \mathbb{K}^n,\ v \neq 0$, que cumple $T(v) = \lambda v$.
Se dice que v es **autovector** de T asociado a λ.
Llamamos **autoespacio** de T asociado a λ al subespacio $S_\lambda = \{v \in \mathbb{V}, T(v) = \lambda v\}$

- La definición no tiene , obviamente, ninguna novedad con respecto a la definición dada para matrices en $\mathbb{K}^{n\times n}$. Más aún todo lo visto para matrices, puede entenderse como un caso particular de esta definición: el espacio vectorial considerado es $\mathbb{K}^n$ y la transformación lineal $T(X) = AX$.

- Si λ_0 es autovalor de $T \Rightarrow T - \lambda_0 I$ es una transformación lineal no inyectiva.

- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son autovalores distintos de T asociados respectivamente a los autovectores $\{v_1, \dots, v_k\}$
  Entonces $\{v_1, \dots, v_k\}$ es l.i.
  $\boxed{\text{A autovalores distintos corresponden autovectores l.i.}}$

- Como consecuencia de la observación anterior:
  Si $S_{\lambda_1}, \dots, S_{\lambda_k}$ son autoespacios de T correspondientes a autovalores distintos $\Rightarrow$ $S_{\lambda_1}, \dots, S_{\lambda_k}$ están en suma directa.
  $S_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus S_{\lambda_k} \subseteq \mathbb{V}$.

Ejemplos

- Sea $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial con Producto Interno y $S \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio de $\mathbb{V}$, si consideramos $T(v) = proy_S(v) \Rightarrow \lambda = 1$ es autovalor de T asociado al autoespacio S y $\lambda = 0$ es autovalor de T asociado a $S^\perp$.

- Si T es una t.l. no inyectiva, o sea dim(Nu(T))> 0, $\lambda = 0$ es autovalor de T y $S_{\lambda=0}$ =Nu(T).

- Si consideramos $(D - \lambda I) : \mathbb{C}^\infty \to \mathbb{C}^\infty$ por lo visto en la práctica de t.l. que Nu($(D - \lambda I)$)=gen$\{e^{\lambda x}\}$ $\Rightarrow$ 0 es autovalor de $(D - \lambda I)$ y su autoespacio asociado es $S = gen\{e^{\lambda x}\}$.

- Entonces, si analizamos el operador $D : \mathbb{C}^\infty \to \mathbb{C}^\infty$ y buscamos sus autovalores y autovectores, queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R} /\ \exists y \not\equiv 0, D(y) = \lambda y \Leftrightarrow y' = \lambda y \Leftrightarrow y = ke^{\lambda x}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces todo $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de D y para cada λ la función $ke^{\lambda x}$ es autovector de D.

Si $\mathbb{V}$ es un espacio de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ encontrar los autovalores y autovectores de T es muy sencillo.

Sea $B = \{v_1,\ v_2,\ \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$, por definición v es un autovector de T asociado al autovalor λ si:

$$\begin{aligned} T(v) &= \lambda v. \\ [T(v)]^B &= [\lambda v]^B = \lambda [v]^B \\ [T]_B^B [v]^B &= \lambda [v]^B \end{aligned}$$

Entonces:
v es un autovector de T asociado al autovalor $\lambda \iff [v]^B$ es autovector de $[T]_B^B$ asociado al autovalor λ.
Observación:

- Si B y B' son bases de $\mathbb{V}$:

  $[T]_B^B = M_{B'}^B [T]_{B'}^{B'} M_B^{B'}$

  Como ya dijimos, $[T]_B^B \sim [T]_{B'}^{B'}$

  Entonces los polinomios característicos de estas matrices son iguales y por lo tanto tiene sentido hablar de **polinomio característico de** T.

  > Definición: Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ transformación lineal se llama **polinomio característico de** T a $P_T(\lambda) = det(\lambda \mathbb{I} - [T]_B^B)$ donde B es cualquier base de $\mathbb{V}$.

> Definición: Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ se dice que T **es diagonalizable** si existe una base de V formada por autovectores de T.

Observaciones:

a. Si $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ formada por autovectores de $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, $T(w_i) = \lambda_i w_i,\ \lambda_i \in \mathbb{K}$.

$$[T]_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Si T es diagonalizable su representación matricial con respecto a una base de V formada por sus autovectores es una matriz diagonal.

b. Como todas las representaciones matriciales de T con respecto a una base B de $\mathbb{V}$ son semejantes, entonces T es diagonalizable $\Leftrightarrow$ su representación matricial, $[T]_B^B$,con respecto a cualquier base B de $\mathbb{V}$ es diagonalizable.

Para calcular autovalores y autovectores de T, usando su representación matricial, la base de entrada y de salida de esa representación matricial debe ser la misma.